

Γραμμική Άλγεβρα 1 - Τεστ Νο 4 - Επαναληπτικό

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1 (30 Μόρια)

Ας είναι πίνακες $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ οι οποίοι ικανοποιούν τη συνθήκη $(A - B)^{-1} = A^{-1} - B^{-1}$. Ορίζουμε τον πίνακα $C = A \cdot B^{-1}$. Αποδείξτε ότι:

- (i) $C + C^{-1} = I_n$
- (ii) $C^3 = -I_n$
- (iii) $C^{1996} - C^{-199} = C^{2000} + C^{-2000}$
- (iv) ο πίνακας $D = C^{-10} + C^{-12} - C^{-17}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Θέμα 2 (20 Μόρια)

Να λυθεί το $n \times n$ γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + nx_2 + nx_3 + \dots + nx_{n-1} + nx_n = 0 \\ nx_1 + 2x_2 + nx_3 + \dots + nx_{n-1} + nx_n = 0 \\ nx_1 + nx_2 + 3x_3 + \dots + nx_{n-1} + nx_n = 0 \\ \vdots \\ nx_1 + nx_2 + nx_3 + \dots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$

Θέμα 3 (25 Μόρια)

Δίνονται $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

- (i) (5 Μόρια) Να εξετασθεί αν ισχύει $|A + B| = |A| + |B|$.
- (ii) (10 Μόρια) Ναδειχθεί ότι ισχύει $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.
- (iii) (5 Μόρια) Αν $A \in GL_n(\mathbb{R})$, ναδειχθεί ότι $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
- (iv) (5 Μόρια) Αν $|A| = -2$, να υπολογίσετε την ορίζουσα $|-A^5|$.

Θέμα 4 (25 Μόρια)

Έστω πίνακας $A \in GL_n(\mathbb{R})$ με προσαρτημένο πίνακα $adj(A)$. Δείξτε ότι

$$|adj(A)| = |A|^{n-1}.$$

Ως εφαρμογή αυτού, αν A είναι ένας 3×3 αντιστρέψιμος πίνακας και

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

να υπολογιστούν η ορίζουσα και ο αντίστροφος του A .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ